Monika Majewska*

Równowaga i stabilność rynku konkurencyjnego z krzyżowymi zależnościami między dynamiką cen, popytem na towary i ich podażą

Wstęp

Równowaga od lat pozostaje niezmiennie w centrum zainteresowania ekonomistów zajmujących się matematyczną teorią rynku. Z jednej strony interesują ich warunki istnienia równowagi (rynkowej, ogólnej), przez które rozumiemy układ cen, przy którym producenci dostarczaj¡ na rynek dokładnie takie ilości towarów, jakie są niezbędne do zaspokojenia efektywnego popytu konsumentów. Z drugiej strony, nie mniej ważny jest sam proces dochodzenia do równowagi oraz to, jak ceny będą się zachowywać, gdy rynek zostanie z niej wytrącony. Stąd też liczne modele równowagi oraz stabilności rynku, które starają się opisywać zjawiska społeczne występujące w gospodarce.

Model, który przedstawiamy w tej pracy jest modyfikacją modelu opracowany przez K. J. Arrowa i L. Hurwicza [Arrow, Hurwicz, 1958]. Opisuje on sytuację, gdy na rynek przybywają ludzie z towarami, które mają zamiar sprzedać, by za uzyskany dochód nabyć inne potrzebne im towary. Dynamika cen w modelu uwzględnia wpływ popytu oraz podaży na dobra substytucyjne oraz komplementarne na towary na rynku. Celem pracy jest zbadanie warunków istnienia cen równowagi oraz warunków stabilności w sensie Lapunowa oraz stabilności asymptotycznej przedstawionego modelu.

1. Opis modelu. Sformułowanie problemu

Interesuje nas rynek, na który przybywa m konsumentów. Każdy z nich przynosi co najmniej jeden z n towarów i jest jednocześnie zainteresowany nabyciem co najmniej jednego dostępnego na rynku towaru (zarówno innego, wcześniej nie posiadanego, jak i tego samego - np. w większej ilości od tej, z jaką przybywa na rynek).

Niech $y^k = (y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k)$ będzie koszykiem towarów dostarczonych na rynek przez k-tego kupca, $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ koszykiem towarów, które chce on nabyć. Przez $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ oznaczymy wektor cen towarów. Każdy z kupców w dalszym ciągu kieruje się przy wyborze koszyka x^k swoimi preferencjami, rozwiązując zadanie:

znaleźć

$$\max u^k(x)$$

przy ograniczeniach

$$\langle p, x\rangle \le \langle p, y^k\rangle = I^k(p),$$

* Mgr, Katedra Ekonomii Matematycznej, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, monika.majewska@ue.poznan.pl

$$x \geq 0.$$

Zredukowaną funkcje popytu definiujemy jako:

$$\varphi^k\left(p, I^k(p)\right) = \varphi^k\left(p, \sum_i p_i y_i^k\right) = f^k(p),$$

a funkcję nadwyżkowego popytu jako:

$$z(p) = \sum_{k=1}^{m} f^k(p) - \sum_{k=1}^{m} y^k.$$

Reguła dynamiki cen obowiązująca na rynku opisana jest następującym układem równań różniczkowych:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \Sigma z\big(p(t)\big). \tag{1}$$

W modelu opisanym przez Arrowa i Hurwicza [Arrow, Hurwicz, 1958] na dynamikę cen towaru i-tego wpływ miały tylko popyt i podaż na ten towar. W rzeczywistości na ceny towarów mają wpływ również zmiany w popycie oraz podaży dóbr substytucyjnych oraz komplementarnych. Założenia o stałym wskaźniku proporcjonalności σ dla całego rynku lub stałej diagonalnej macierzy takich wskaźników może być często zbyt wielkim uproszczeniem rzeczywistości.

Co możemy wywnioskować o elementach macierzy Σ? Z całą pewnością, jeżeli będziemy mieli do czynienia z towarami normalnymi, to elementy σ_{ii} na jej głównej przekątnej będą liczbami dodatnimi, natomiast dla dóbr Giffena oraz luksusowych będą o liczby ujemne. Dla $i \neq j$ elementy σ_{ij} będą przyjmowały wartości dodatnie dla dóbr komplementarnych oraz ujemne dla dóbr substytucyjnych. W przypadku dóbr j, które względem towaru i-tego nie są ani substytucyjne ani komplementarne, wielkość popytu nie będzie miała żadnego wpływu na cenę dobra i-tego, stąd dla tych towarów $\sigma_{ij} = 0$. Wpływ popytu na dobra komplementarne oraz substytucyjne względem dobra i-tego oraz ich podaży na cenę dobra i-tego jest generalnie zdecydowanie mniejszy, niż wpływ popytu oraz podaży dobra i-tego na jego cenę. Stąd bardzo często macierz Σ będzie macierzą o silnie dominującej przekątnej, tzn. $\forall_{i=1,2,\dots,n}\ |a_{ii}| > \sum_{i=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}|$. Z silnej dominacji przekątnej macierzy wynika od razu jej nieosobliwość.

2. Równowaga

Przy tak skonstruowanym rynku towarów powstaje pytanie, czy ceny równowagi będą istniały. Aby na nie odpowiedzieć, należy wprowadzić dwa dodatkowe założenia:

I. $f^k \in C^1(int\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n)$ oraz $f_i^k(p) \xrightarrow[p_i \to 0]{} +\infty$ lub $f_i^k(p) \xrightarrow[p_i \to 0]{} \bar{f}_i^k$, gdzie $\bar{f}_i^k > 0$.

Warunek ten głosi w szczególności, że popyt na towar oferowany za darmo (lub po bardzo niskich cenach) zawsze jest wyższy od podaży.

II. Macierz funkcyjna $J(p) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial p_j}\right)_{n\times n}$ spełnia warunek:

$\forall_{\lambda\in\mathbb{R}^n\setminus(\mathbb{R}^n_+\cup\mathbb{R}^n_-)}\ \forall_{p\in int\, P^n_+(1)}\ \ (\lambda\Sigma J(p)\lambda^T > 0).$

Wtedy prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 1. Przy założeniach (I.) oraz (II.) istnieje dokładnie jeden wektor równowagi rynkowej $\bar{p} > 0$ określony z dokładnością do struktury.

Dowód tego twierdzenia przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia przedstawionego w pracy [Panek, 2003]. W dowodzie tym, ze względu na inne warunki nałożone na funkcję popytu, nie możemy jednak skorzystać bezpośrednio z twierdzenia Brouwera. Twierdzenie to jest jednak równoważne lematowi:

Lemat 1. Niech $S = \{x \in \mathbb{R}^n_{++} \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ oraz $\bar{S} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Niech ponadto $F: S \to \bar{S}$ będzie funkcją ciągłą. Istnieje wtedy ciąg $\{x^q\}_{q=1}^\infty \subset S$ spełniający warunki:

$$\forall_{i=1,2,\ldots,n}\quad \lim_{q\to\infty}\left(F_i(x^q) - x_i^q\right) = 0.$$

Dowód na równoważność obu twierdzeń znajduje się w pracy [Maćkowiak, 2009]. Stąd dowód twierdzenia o istnieniu dokładnie jednego wektora cen równowagi rynkowej dla modelu rynku Arrowa-Hurwicza może być również zastosowany przy udowadnianiu Twierdzenia 1.

3. Stabilność

Reguła dynamiki cen obowiązująca na rynku opisana jest następującym układem równań różniczkowych:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \Sigma z\big(p(t)\big),$$

z warunkiem początkowym $p(0) = p^0 > 0$. Każda (p^0, ∞)-dopuszczalna trajektoria cen będzie leżała na powierzchni pewnej gładkiej rozmaitości w $\mathbb{R}^n_+$. W dalszej części rozdziału najpierw udowodnimy, że rynek z równaniem dynamiki cen (1) jest stabilny w sensie Lapunowa, a następnie, że jest asymptotycznie stabilny.

3.1. Stabilność w sensie Lapunowa

Udowodnimy najpierw, że układ (1) jest stabilny w sensie Lapunowa (odwołanie). Załóżmy, że towary dostępne na rynku są towarami normalnymi, tzn. $\forall_i\ \sigma_{ii} > 0$, a ceny nie są unormowane. Wprowadźmy oznaczenie:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sigma_{i1}z_1\big(p(t)\big) + \sigma_{i2}z_2\big(p(t)\big) + \cdots + \sigma_{in}z_n\big(p(t)\big) = f_i\Big(z\big(p(t)\big)\Big).$$

Załóżmy, że funkcja $f_i\Big(z\big(p(t)\big)\Big)$ zachowuje znak funkcji $z_i\big(p(t)\big)$. Potrzebne nam będą trzy założenia:

(A) Układ równań różniczkowych $\dot{p}_i = g_i(p)$, gdzie $g_i(p) = f_i\big(z(p)\big), i = 1,2,\ldots,n$, dla każdego punktu początkowego $p^0 > 0$ oraz dla każdego $t \geq 0$ ma rozwiązanie $p(t) = \psi(t, p^0)$, które jest ciągłe i określone jednoznacznie przez ten punkt początkowy p^0.

(B) Funkcje nadwyżkowego popytu $z_i(p)$ są dodatnio jednorodne stopnia zero.

(C) Istnieje dodatni wektor cen równowagi $\bar{p} > 0$.

(D) Jeżeli $z(p) \neq 0, z(\bar{p}) = 0$ oraz

$$\frac{p_{i_{max}}}{\bar{p}_{i_{max}}} = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \frac{p_i}{\bar{p}_i}, \qquad \frac{p_{i_{min}}}{\bar{p}_{i_{min}}} = \min_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \frac{p_i}{\bar{p}_i},$$

to zachodzą nierówności: $z_{i_{max}}(p) < 0, z_{i_{min}}(p) > 0$.

Twierdzenie 2. Jeżeli spełnione są założenia (A), (B), (C) oraz (D), wtedy układ równań różniczkowych (1) jest stabilny w sensie Lapunowa w otoczeniu pewnego wektora cen równowagi $\bar{p} \in P$.

Szkic dowodu:

W dowodzie korzystamy z twierdzenia o stabilności w sensie Lapunowa układu równań różniczkowych (1). Dowód przebiega poprzez wskazanie odpowiednich funkcji Lapunowa i udowodnieniu, że spełniają one zadane założenia.

Zdefiniujmy dwie funkcje:

$$\overline{\Lambda}(p) = \max_{j \in \{1,2,\dots,n\}} \frac{p_j}{\bar{p}_j},$$

$$\underline{\Lambda}(p) = \min_{j \in \{1,2,\dots,n\}} \frac{p_j}{\bar{p}_j},$$

Wskazane funkcje $\overline{\Lambda}(p)$ oraz $-\underline{\Lambda}(p)$ są dla układu równań (1) zmodyfikowanymi funkcjami Lapunowa, układ jest więc stabilny w sensie Lapunowa [Salle, Lefschetz, 1966], [Uzawa, 1961].

3.2. Stabilność asymptotyczna

Rozważać będziemy ponownie układ dynamiczny postaci:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \Sigma z\big(p(t)\big) = g\big(p(t)\big), \tag{2}$$

z warunkiem początkowym $p(0) = p^0 > 0$. Przed przejściem do dowodu wprowadzimy kilka potrzebnych oznaczeń i założeń. O funkcji nadwyżkowego popytu będziemy zakładać, że działa z $\mathbb{R}^n_+$ w $\mathbb{R}^n$, zbiór jej wartości jest niepusty, domknięty oraz wypukły, jest funkcją półciągłą z góry, spełnia prawo Walrasa oraz jest funkcją dodatnio jednorodną stopnia zero. Ponadto zakładamy, że funkcja nadwyżkowego popytu spełnia warunki brzegowe, tzn. jeżeli ciąg cen $p^k \xrightarrow[k\to\infty]{} p$, gdzie p jest wektorem cen, którego współrzędne $p_i = 0$ dla pewnych $i \in \{1,2,\dots,n\}$, to $d_m(z(p^k), 0) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ (d_m jest metryką maksimum).

Wprówadźmy następujące oznaczenia:

$$H_0(p) = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, p\rangle = 0\}.$$

W poniższym dowodzie twierdzenia korzystamy z twierdzenia [Demidowicz, 1982] o asymptotycznej stabilności układu.

Twierdzenie 3. Niech $F\colon P^n_+(1) \to 2^{\mathbb{R}^n}$ będzie taką multifunkcją półciągłą z dołu niepustym, domkniętym oraz wypukłym zbiorem wartości, że dla każdego $p \in P^n_+(1)$ obraz $F(p)$ jest stożkiem oraz $F(\bar{p}) = \{0\}$ tylko dla wektora cen równowagi $\bar{p}$ (spełniającego warunek $g(\bar{p}) = 0$). Ponadto niech $F(p) \subset H_0(p)$

dla każdego $p \in P_+^n(1)$. Niech g będzie taką funkcją wybraną z F w sposób ciągły, że dla każdego $p \in P_+^n(1)$ istnieje rozwiązanie $p: [0, \infty) \to P_+^n(1)$ układu równań (2) z warunkiem początkowym $p(0) = p^0 > 0$. Przy tych założeniach rynek Arrowa-Hurwicza z równaniem dynamiki cen (2) jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny.

Dowód:

Zgodnie z założeniami (I) i (II) istnieje dokładnie jeden wektor cen równowagi $\bar{p}$ określony z dokładnością do struktury. Dowód przeprowadzimy dla wektorów cen p unormowanych do 1 (dla każdego wektora cen p mamy więc $\|p\| = 1$). Oznaczmy przez $\bar{p}^e$ wektor cen równowagi, dla którego $\|\bar{p}^e\| = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i^e = 1$. Skonstruujemy funkcję Lapunowa układu [Demidowicz, 1982]. Niech:

$$V(p) = v - \prod_{i=1}^{n} p_i^{\left(\bar{p}_i^e\right)^2},$$

gdzie:

$$v = \prod_{i=1}^{n} (\bar{p}_i^e)^{\left(\bar{p}_i^e\right)^2}.$$

Funkcja $p \to \prod_{i=1}^n p_i^{\left(\bar{p}_i^e\right)^2}$ jest rosnąca oraz wklęsła na $\mathbb{R}_+^n$, stąd funkcja V jest malejąca i wypukła. Zauważmy, ze $V(\bar{p}^e) = 0$. Udowodnimy, że funkcja ta jest dodatnia dla każdego wektora cen $p \neq \bar{p}$ oraz ściśle malejąca, czyli jej pochodne cząstkowe są mniejsze od 0. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia minimum funkcji V na $P_+^n(1) = \{p \in \mathbb{R}_+^n \mid \|p\| = 1\}$ jest istnienie rozwiązania układu równań:

$$\nabla\big(V(p) + \lambda(1 - |p|)\big) = 0,$$
$$1 - |p| = 0,$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$. Mamy:

$$\nabla \mathrm{V(p)} = -\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\left(\bar{p}_i^e\right)^2} \cdot \frac{\left(\bar{p}_j^e\right)^2}{p_j}\right)_{\mathrm{j=1,2,\dots,n}} =$$

$$= -\prod_{i=1}^{n} p_i^{\left(\bar{p}_i^e\right)^2} \cdot \xi(p) = -(V(p) - v) \cdot \xi(p),$$

gdzie $\xi(p) = \left(\frac{(\bar{p}_1^e)^2}{p_1}, \frac{(\bar{p}_2^e)^2}{p_2}, \dots, \frac{(\bar{p}_n^e)^2}{p_n}\right)$. Stąd otrzymujemy układ równań:

$$(V(p) - v) \cdot \frac{(\bar{p}_i^e)^2}{p_i} - \lambda p_i = 0, \quad i = 1,2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 1.$$

Rozwiązując pierwszych n równan układu (***) otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(V(p) - v) \cdot (\bar{p}_i^e)^2}{\lambda} = 1.$$

Z założenia $\|p\| = 1$, czyli faktycznie $\lambda = V(p) - v \neq 0$. Funkcja V osiąga minimum w punkcie $p = \bar{p}^e$. Ponadto jest funkcją dodatnią dla każdego $p \in S_+ \backslash \{\bar{p}^e\}$. Pochodna $\nabla V(p)$ jest funkcją ujemną, więc , więc V jest funkcją Lapunowa. Układ (2) jest zatem, zgodnie z twierdzeniem o asymptotycznej stabilności [Demidowicz, 1982] układem lokalnie asymptotycznie stabilnym.

Ponadto, przy dodatkowych założeniach rynek taki jest globalnie asymptotycznie stabilny. Dowód ten można znaleźć w pracy [Arkit, 2003], jednak tracimy w ten sposób dowolność macierzy Σ.

4. Model rynku z funkcjami użyteczności kupców szczególnej postaci

4.1. Postać ogólna modelu

Na rynek przybywa m kupców, a każdy z nich przynosi koszyk n towarów. Każdy z kupców przychodzi z koszykiem towarów $y^k = \left(y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k\right)$. Funkcja użyteczności każdego z k kupców ma postać:

$$u^k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\}.$$

Przy ustalonym wektorze cen $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ k-ty kupiec rozwiązuje zadanie:

znaleźć

$$\max \min\{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\} \tag{3}$$

przy ograniczeniach

$$\langle p, x\rangle \leq \langle p, y^k\rangle = I^k, \tag{4}$$

$$x_i \geq 0.$$

Rozwiązując zadanie (3) - (4) otrzymujemy funkcję popytu

$$f^k(p) = \left(\frac{I^k}{\sum_{i \neq k} p_i}, \dots, \frac{I^k}{\sum_{i \neq k} p_i}, 0, \frac{I^k}{\sum_{i \neq k} p_i}, \dots, \frac{I^k}{\sum_{i \neq k} p_i}\right),$$

w której liczba 0 występuje na k-tym miejscu. Funkcja nadwyżkowego popytu na towar j-ty przyjmuje postać

$$z_j(p) = \sum_{k \neq j} \frac{I^k}{\sum_{i \neq k} p_i} = \sum_{k} y_j^k.$$

Układ ten nie ma rozwiązania analitycznego.

4.2. Rynek 3 × 3. Wyniki obliczeń numerycznych

Na rynek przybywa 3 kupców, przedmiotem wymiany są 3 towary. Każdy z kupców kieruje się swoją indywidualną funkcją użyteczności, rozwiązując odpowiednie zadanie:

$$\max u^1(x_1, x_2, x_3) = \max \min\{x_2, x_3\},$$

przy ograniczeniu budżetowym:

$$p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 + p_3 x_3^1 \leq p_1 y_1^1 + p_2 y_2^1 + p_3 y_3^1,$$

$$x_1^1, x_2^1, x_3^1 \geq 0.$$

Analogicznie dla kupca drugiego oraz trzeciego.

Ich rozwiązaniami są następujące funkcje popytu:

$$f^1(p) = \left(0, \frac{p_1 y_1^1 + p_2 y_2^1 + p_3 y_3^1}{p_2 + p_3}, \frac{p_1 y_1^1 + p_2 y_2^1 + p_3 y_3^1}{p_2 + p_3}\right),$$
$$f^2(p) = \left(\frac{p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2}{p_1 + p_3}, 0, \frac{p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2}{p_1 + p_3}\right),$$
$$f^3(p) = \left(\frac{p_1 y_1^3 + p_2 y_2^3 + p_3 y_3^3}{p_1 + p_2}, \frac{p_1 y_1^3 + p_2 y_2^3 + p_3 y_3^3}{p_1 + p_2}, 0\right).$$

Stąd otrzymujemy funkcję nadwyżkowego popytu

$$z(p) = \left(\frac{p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2}{p_1 + p_3} + \frac{p_1 y_1^3 + p_2 y_2^3 + p_3 y_3^3}{p_1 + p_2} - y_1^1 - y_1^2 - y_1^3,\right.$$
$$\frac{p_1 y_1^1 + p_2 y_2^1 + p_3 y_3^1}{p_2 + p_3} + \frac{p_1 y_1^3 + p_2 y_2^3 + p_3 y_3^3}{p_1 + p_2} - y_2^1 - y_2^2$$
$$- y_2^3, \quad \frac{p_1 y_1^1 + p_2 y_2^1 + p_3 y_3^1}{p_2 + p_3} + \frac{p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2}{p_1 + p_3} - y_3^1$$
$$\left.- y_3^2 - y_3^3\right).$$

Stan równowagi rynkowej znajdziemy rozwiązując układ równań:

$$\frac{p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2}{p_1 + p_3} + \frac{p_1 y_1^3 + p_2 y_2^3 + p_3 y_3^3}{p_1 + p_2} - y_1^1 - y_1^2 - y_1^3 = 0,$$
$$\frac{p_1 y_1^1 + p_2 y_2^1 + p_3 y_3^1}{p_2 + p_3} + \frac{p_1 y_1^3 + p_2 y_2^3 + p_3 y_3^3}{p_1 + p_2} - y_2^1 - y_2^2 - y_2^3 = 0,$$
$$\frac{p_1 y_1^1 + p_2 y_2^1 + p_3 y_3^1}{p_2 + p_3} + \frac{p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2}{p_1 + p_3} - y_3^1 - y_3^2 - y_3^3 = 0.$$

Dynamikę cen opisuje układ równań:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \sigma_{11} z_1(p(t)) + \sigma_{12} z_2(p(t)) + \sigma_{13} z_3(p(t)),$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \sigma_{21} z_1(p(t)) + \sigma_{22} z_2(p(t)) + \sigma_{23} z_3(p(t)),$$
$$\frac{dp_3(t)}{dt} = \sigma_{31} z_1(p(t)) + \sigma_{32} z_2(p(t)) + \sigma_{33} z_3(p(t)).$$

Dla dalszych obliczeń oraz symulacji przyjęto przykładowe wartości początkowe towarów przyniesionych przez kupców na rynek:

$$y^1 = (0,1,0), y^2 = (0,0,1), y^3 = (1,0,0).$$

Dla tak dobranych wektorów y ceny równowagi tworzy każdy wektor $\bar{p} = \gamma(1,1,1), \gamma > 0$. Funkcja nadwyżkowego popytu ma wówczas postać:

$$z(p) = \left(\frac{p_1(p_3 - p_2)}{(p_1 + p_2)(p_1 + p_3)}, \frac{p_2(p_1 - p_3)}{(p_1 + p_2)(p_2 + p_3)}, \frac{p_3(p_2 - p_1)}{(p_1 + p_3)(p_2 + p_3)}\right),$$

Skąd otrzymujemy układ równań dynamiki cen (po przejściu z układu ciągłego na dyskretny):

$$\Delta p_1(t)=\sigma_{11}\cdot\frac{p_1(p_3-p_2)}{(p_1+p_2)(p_1+p_3)}+\sigma_{12}\cdot\frac{p_2(p_1-p_3)}{(p_1+p_2)(p_2+p_3)}+$$
$$+\sigma_{13}\cdot\frac{p_3(p_2-p_1)}{(p_1+p_3)(p_2+p_3)},$$
$$\Delta p_2(t)=\sigma_{21}\cdot\frac{p_1(p_3-p_2)}{(p_1+p_2)(p_1+p_3)}+\sigma_{22}\cdot\frac{p_2(p_1-p_3)}{(p_1+p_2)(p_2+p_3)}+$$
$$+\sigma_{23}\cdot\frac{p_3(p_2-p_1)}{(p_1+p_3)(p_2+p_3)},$$
$$\Delta p_3(t)=\sigma_{31}\cdot\frac{p_1(p_3-p_2)}{(p_1+p_2)(p_1+p_3)}+\sigma_{32}\cdot\frac{p_2(p_1-p_3)}{(p_1+p_2)(p_2+p_3)}+$$
$$+\sigma_{33}\cdot\frac{p_3(p_2-p_1)}{(p_1+p_3)(p_2+p_3)}.$$

Poniżej prezentujemy wyniki obliczeń (wektory cen równowagi rynkowej oraz przykładowe przebiegi trajektorii cen) odpowiadające trzem różnym macierzom Σ i dwóm różnym początkowym wektorom cen. Przy niewłaściwym doborze współczynników tej macierzy można jednak uzyskać rozwiązania niestabilne lub ujemne, co jest cechą charakterystyczną dynamiki cen na rynku z czasem dyskretnym. W tabelach (1) i (2) i na rysunkach (1), (2) ilustrujemy przebieg trajektorii cen będących rozwiązaniem układu (1) z warunkiem początkowym $p_0=(5,10,15)$ oraz dwiema macierzami:

$$\Sigma_1=\begin{bmatrix}0{,}21 & 0{,}08 & 0{,}15\\ 0{,}09 & 0{,}15 & 0{,}02\\ 0{,}09 & 0{,}13 & 0{,}2\end{bmatrix}\quad \Sigma_2=\begin{bmatrix}0{,}18 & 0{,}03 & 0{,}04\\ 0{,}08 & 0{,}2 & -0{,}04\\ 0{,}1 & -0{,}01 & 0{,}15\end{bmatrix}.$$

W tabeli (3) oraz na rysunku (3) prezentujemy przebieg trajektorii cen, która nie jest zbieżna do wektora cen równowagi, co więcej, przyjmuje również wartości ujemne. Otrzymujemy ją rozwiązując układ (1) z macierzą

$$\Sigma_3=\begin{bmatrix}0{,}32 & -0{,}1 & 0{,}05\\ -0{,}08 & 0{,}31 & 0{,}04\\ 0{,}09 & 0{,}01 & 0{,}36\end{bmatrix}$$

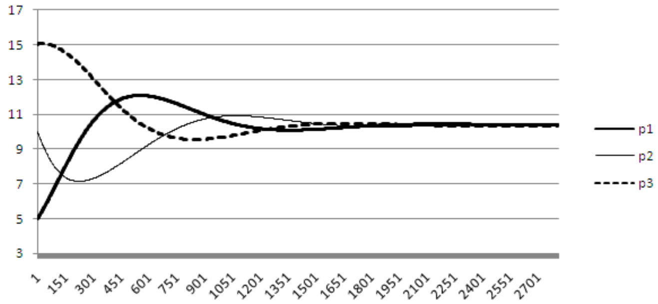
i tym samym warunkiem początkowym.

Tablica 1 Ceny $p(t)=(p_1(t),p_2(t),p_3(t))$- rozwiązanie układu równań (***) z warunkiem początkowym $p(0)=(5,10,15)$ oraz macierzą Σ_1

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0	5	10	15
1	5,0187	9,9705	15,0028
2	5,0373	9,9412	15,0056
3	5,0561	9,9120	15,0082
…	…	…	…
-	$\bar{p}_1=10{,}3732$	$\bar{p}_2=10{,}3732$	$\bar{p}_3=10{,}3732$

Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 1. Trajektoria cen $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$- rozwiązanie układu równań (***) z warunkiem początkowym $p(0) = (5, 10, 15)$ oraz macierzą Σ_1



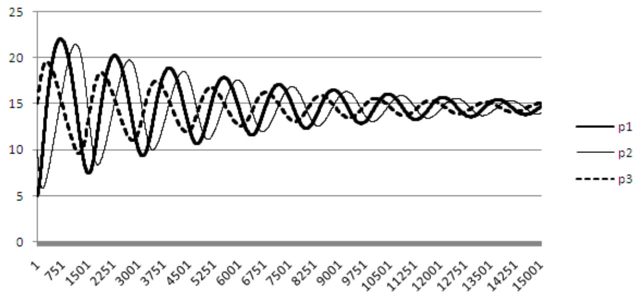
Źródło: Opracowanie własne

Tablica 2. Ceny $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$- rozwiązanie układu równań (***) z warunkiem początkowym $p(0) = (5, 10, 15)$ oraz macierzą Σ_2

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0	5	10	15
1	5,013	9,9473	15,0335
2	5,0262	9,8949	15,0669
3	5,0397	9,8426	15,1002
…	…	…	…
-	$\bar{p}_1 = 14{,}57$	$\bar{p}_2 = 14{,}57$	$\bar{p}_3 = 14{,}57$

Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 2. Trajektoria cen $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$- rozwiązanie układu równań (***) z warunkiem początkowym $p(0) = (5, 10, 15)$ oraz macierzą Σ_2



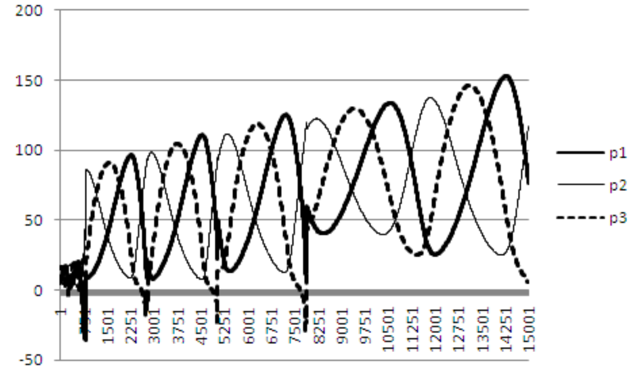
Źródło: Opracowanie własne

Tablica 3. Ceny $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$- rozwiązanie układu równań (***) z warunkiem początkowym $p(0) = (5, 10, 15)$ oraz macierzą Σ_3

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0	5	10	15
1	5,0608	9,9167	15,0588
2	5,1222	9,8334	15,1163
3	5,1842	9,7503	15,1725
…	…	…	…
-	$\bar{p}_1 = -$	$\bar{p}_2 = -$	$\bar{p}_3 = -$

Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 3. Trajektoria cen $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$- rozwiązanie układu równań (***) z warunkiem początkowym $p(0) = (5, 10, 15)$ oraz macierzą Σ_3



Źródło: Opracowanie własne

Zakończenie

Na temat równowagi i stabilności rynku konkurencyjnego napisano wiele książek i artykułów. Proponowane w nich modele różnią się zarówno stopniem złożoności, jak i sposobem (oraz zakresem) ujmowania różnorodnych aspektów funkcjonowania rynku konkurencyjnego. W pracy zaproponowano modyfikację standardowego modelu Arrowa-Hurwicza ze zróżnicowaną dynamiką cen poszczególnych towarów oraz z wprowadzonymi do modelu towarami komplementarnymi oraz substytucyjnymi. Na dynamikę ceny towaru w przedstawionym modelu ma wpływ nie tylko popyt nadwyżkowy na ten konkretny towar, ale również popyt i podaż towarów do niego substytucyjnych oraz komplementarnych. Dla tak skonstruowanego modelu nie zmienia się zasadniczo dowód na istnienie cen równowagi na rynku. W pracy została udowodniona stabilność w sensie Lapunowa oraz stabilność asymptotyczna modelu. Wyniki teoretyczne zilustrowane zostały ponadto na kilku przykładach numerycznych.

Literatura

1. Arkit A. (2003), Globally stable price dynamics, „Journal of Mathematical Economics”, nr 39
2. Arkit A. (2006), The existence of globally stable price mechanisms for pure exchange models with upper semicontinous multivalued excess demand, " Game Theory and Mathematical Economics Banach Center Publications", nr 71
3. Arrow K. J., Hurwicz L. (1958), On the stability of the competitive equilibrium I, “Econometrica”, nr 26
4. Arrow K. J., Block H. D., Hurwicz L. (1959), On the stability of the competitive equilibrium II, “Econometrica”, nr 27
5. Demidowicz B. P. (1982), Matematyczna Teoria Stabilności, North-Holland Publishing Company, Amsterdam

6. Maćkowiak P. (2009), Equivalents of brouwer's _xed point theorem and economic equilibrium, preprint
7. Panek E. (2003), Ekonomia Matematyczna, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań
8. Salle J. L., Lefschetz S. (1966), Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa,
9. Uzawa H. (1961), The stability of dynamic processes, Econometrica, nr 29

Streszczenie

Model przedstawiony w pracy jest zmodyfikowanym modelem Arrowa-Hurwicza z wprowadzonym zróżnicowaniem reakcji cen towarów na popyt oraz podaż. Do dynamiki cen zostały wprowadzone dobra komplementarne oraz substytucyjne. Następnie dla tak zdefiniowanego modelu badana jest równowaga modelu, stabilność w sensie Lapunowa oraz stabilność asymptotyczna. Zostanie pokazane, że niezależnie od proponowanych zmian wprowadzonych w stosunku do wyjściowej wersji modelu, twierdzenie o istnieniu równowagi pozostanie prawdziwe. Podczas badania stabilności każda modyfikacja będzie jednak wymagała nowych założeń na temat zasad funkcjonowania rynku. Dla modelu przeprowadzona jest również symulacja dla wybranych funkcji użyteczności.

Equilibrium and stability of the competitive market with intersecting correlations between prices dynamics, demand and supply of commodities (Summary)

The model introduced in the article is a modification of Arrow-Hurwicz model with established diversify reactions of commodities prices to the demand and supply. There had been implemented complementary and substitutionary goods to the price dynamics. Subsequently there had been examined the existence of equilibrium, Lyapunov stability and asymptotic stability. It had been shown that apart from proposed modifications that had been brought to the original model, the theorem of existence of equilibrium prices will still hold. The proof of the stability is for each modification different and needs other assumptions. For the model there are also conducted some simulations.